СОДЕРЖАНІЕ.

I.

Отчетъ Комиссіи 4-го присужденія премін имени *Н. И. Лобачевскаго.*

Д. Н. Зейлигеръ. Отзывъ о работахъ *Beppo-Levi*, представленныхъ на конкурсъ.

Н. Н. Парфентьевъ. Роль идеи порядка въ математикѣ.

II.

Лѣтопись Физико-математическаго Общества.

Протоколы 132 и 133-го засѣданій Ф.—М. Общества.

Table des matières.

Prix Lobatchefsky (4-ème concours (1906).

D. Seiliger. Rapport sur les travaux de *Beppo-Levi.*

N. Parfentieff. Rôle de l'idée d'ordre en mathématiques.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHYSICO-MATHÉMATIQUE
de Kasan.
Deuxième série. Tome XV.

W 202/491

ИЗВѢСТІЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

ТОМЪ XV.

№. 3.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1906.

Роль идеи порядка въ математикѣ.

Математика въ своихъ основахъ есть часть логики, и ей поэтому приходится сплошь и рядомъ сталкиваться съ самыми первичными понятіями. Поэтому, желая быть болѣе яснымъ и понятнымъ, я считаю необходимымъ обратиться навремя къ самымъ основнымъ и распространеннымъ понятіямъ логики. Прежде всего мы сталкиваемся съ основнымъ непроизвольнымъ процессомъ нашего мышленія „отображеніемъ“ (Abbildung) внѣтняго міра, насъ окружающаго, при помощи процессовъ нашего сознанія. Это отображеніе, вызванное нашими чувствами, ощущеніями, размышленіями, процессами сознанія—памятью, воспоминаніями, создаетъ въ насъ міръ идей—сколокъ съ міра реальнаго. При помощи непрерывныхъ непрестанныхъ отображеній мы вырабатываемъ языкъ, мысли, идеи, навыки, знаки, при помощи ихъ мы приспособляемся къ міру, насъ окружающему, вырабатывая средства воздѣйствія и взаимодѣйствія съ внѣшнимъ міромъ. Обратимъ особенное вниманіе на наши „познавательные“ процессы...

Прежде всего у насъ созидаются частныя, частичныя представленія и знанія, но по мѣрѣ ихъ роста они обобщаются и создаютъ въ насъ представленіи „классовыя“ или родовыя. Число классовъ, т. е. представленій о группахъ однохарактерныхъ объектовъ или явленій, конечно безконечно

велико, а сами классы—чрезвычайно разнообразны. Мы выдѣлимъ одинъ „специфическій классъ“, насъ интересующій,—классъ первичныхъ математическихъ понятій. Несомнѣнно или по крайней мѣрѣ весьма вѣроятно, что и идеи *кардинальныя* (квантитативныя), и идеи *порядка* возникли у человѣка одновременно и независимо одна отъ другой, но вѣроятно въ началѣ между ними не было установлено тѣсной связи... Что въ самомъ началѣ человѣческое сознаніе обладало представленіями о классахъ чисто квантитативнаго характера (кардинальнаго), лишенными только лишь отчетливости, подобной—нашей, это ясно, и доказательства для этого мы найдемъ въ въ филологіи. Въ самомъ дѣлѣ, что какъ не это, доказываютъ чисто квантитативнаго характера филологическія понятія: „пара“, „тройка“, „двое“, „оба“, „много“, „мало“....—все это классы подобныхъ классовъ.... Вставая на подобную точку зрѣнія, мы сейчасъ-же въ состояніи опредѣлить и „числа“. Число съ этой точки зрѣнія есть тоже классъ подобныхъ классовъ, классъ, опредѣляющій *одно* специфическое свойство группъ объэктовъ. Какое свойство? Разберемъ!... Чтобы судить о свойствахъ *общихъ* числа, нужно изучить „классы“ и ихъ взаимоотношенія сначала вообще. При такомъ взглядѣ на дѣло ариѳметика явится чистой логикой. Посмотримъ, какъ можно было бы подойти къ „числу“. Несомнѣнно, что очень рано человѣческая мысль стала группировать объекты, предметы *вмѣстѣ*, несомнѣнно, что она очень рано познакомилась и *со счетомъ* — въ смыслѣ установленія простого лишь соотвѣтствія между двумя какими либо группами: группой сосчитываемыхъ, скажемъ, объектовъ и, положимъ, системой, подобной четкамъ, или какими-либо отвлеченными понятіями, знаками, словами, или какими-либо другими въ извѣстномъ порядкѣ слѣдующими объектами. Здѣсь мы видимъ въ зародышѣ и идею порядка, и идею квантита-

тивную. Но ведетъ-ли счетъ прямо къ понятію о кардинальномъ числѣ? Нѣтъ, понятно. Процессы, подобные указаннымъ, даютъ намъ пока лишь неясную, неполную идею о кардинальномъ числѣ, какъ о мѣрѣ „совокупности объектовъ“ или группы ихъ, причемъ объекты группъ въ этомъ процессѣ уже являются *однородными*. Есть-ли въ этомъ случаѣ однородность такого же точно характера, какъ и наша, современно обычная? Нѣтъ, конечно, ибо простая совокупность объектовъ не предполагаетъ еще кардинальнаго числа: простая совокупность часто лишь связуется и образуется логически союзомъ „и“ безъ всякаго отношенія къ кардинальному числу. Иными словами, „сложеніе“ не есть принадлежность просто „чиселъ“: оно—возможно и въ логикѣ. Къ нашей же обычной „однородности“ мы пришли не сразу, а постепенно: сначала мы складывали и группировали объекты, затѣмъ соотвѣтствующія имъ логическія понятія, потомъ по выдѣленіи классовъ при помощи подобныхъ явленій, объектовъ, уже построенныхъ на идеѣ „однородности“ мы группировали классы, и наконецъ уже изъ этихъ классовъ выдѣляются, классы кардинальнаго характера—они то и суть числа.

Такимъ образомъ ариѳметика, оказывается, уже появляется въ концѣ. Что-же наше только произведенное размышленіе о классахъ дало намъ? То, что „кардинальность“, вообще говоря, не чужда идеѣ „подобныхъ классовъ“ и генетически, и логически. И понятно, почему это такъ: понятіе „индивидуумъ“ класса уже предполагаетъ созданной идею „*одинъ*“ въ чисто ариѳметическомъ смыслѣ и идею „*много*“ (Menge) „*совокупность*“. Но все-же кардинальнаго числа въ нашемъ смыслѣ слова еще нѣтъ!

Одно только мы теперь видимъ: конценція „классъ“ обладаетъ нѣкоторыми свойствами *общими* съ числомъ—какими, ясно изъ только — что сказаннаго нами, именно: однород-

ностью въ ариѳметическомъ смыслѣ и суммой объектовъ почти въ томъ смыслѣ; говоримъ „почти“, ибо нашей кардинальности у суммы еще нѣтъ. Что же нужно еще для того, чтобы овладѣть ею? Теперь, *post-factum*, мы можемъ дать отвѣтъ на это: нужно развитое представленіе двухъ понятій „больше“ и „меньше“. Есть-ли эти кардинальныя теперь понятія первичныя? Нѣтъ, вѣроятно! Они развились изъ выше обрисованныхъ нами понятія „классъ“, но освѣщеннаго вѣроятно идеей *порядка*. Но развѣ, стоя на прежней точкѣ зрѣнія, мы не подойдемъ къ понятіямъ „больше“ и „меньше“?.. Едва-ли: можно сомнѣваться, что они будутъ понятіями въ нашемъ смыслѣ. Процессъ отображенія одной системы при помощи другой или одного класса при помощи однороднаго другого несомнѣнно долженъ былъ вести къ понятіямъ „больше“ и „меньше“, но едва-ли можно думать, что кардинальная точка зрѣнія могла повести къ созданію нашихъ современныхъ понятій „больше“ и „меньше“, считающихся въ тоже время и съ идеей порядка. Словомъ, изъ нашего маленькаго очерка можно вывести, что *кардинальныя* числа могутъ быть опредѣлены и безъ помощи *ординальныхъ*, но благодаря отсутствію идеи порядка они должны были бы пожалуй оставаться *хаотически смѣшанными нашими числами* натуральнаго ряда (рѣчь пока идетъ о цѣлыхъ положительныхъ числахъ.) И для того, чтобы привести ихъ въ порядокъ, въ систему—въ натуральный рядъ, необходима идея порядка, необходимо изученіе взаимоотношеній классовъ съ точки зрѣнія идеи порядка. Иными словами, мы думаемъ, что кардинальныя числа *сполна* безъ идеи порядка, безъ ординальныхъ чиселъ созданы быть не могутъ, тогда какъ ординальныя числа безъ кардинальныхъ мыслимы и легко созидаемы....

Обратимся же теперь къ идеѣ „порядка“. Что—такое

„порядокъ“? Къ идеѣ порядка человѣческая мысль подошла тоже не сразу. Изучая окружающій насъ міръ, мы должны были замѣтить различныя взаимоотношенія между цѣлыми рядами послѣдовательныхъ явленій и элементами этихъ рядовъ. Что такіе ряды съ первыхъ-же шаговъ должны были броситься въ глаза человѣку, говорить много не придется: непрерывная послѣдовательность дней и ночей, лѣтъ, временъ года, непрерывная цѣпь собственныхъ переживаній, воспоминаній, надеждъ на будущее, переживанія въ настоящій моментъ, пространственные ряды, понятія „верхъ“, „низъ“, „лѣвый“, „правый“, „между“ и т. п.— все это вмѣстѣ взятое и есть колыбель идеи порядка. Но понятно мы должны были сначала всѣ эти явленія внѣшняго и нашего внутренняго міровъ переработать, перевести на языкъ мысли, логики—тогда только можетъ въ насъ зародиться ясная, отчетливая наша идея порядка. Если бы мы вздумали проанализировать внимательно какой-либо изъ вышеданныхъ нами рядовъ, ну хоть временной рядъ, то мы замѣтимъ сейчасъ же ,что мы, останавливаясь на какомъ-либо элементѣ, выхваченномъ изъ ряда произвольно, и приводя его въ связь съ смежными съ нимъ непосредственно возлѣ него лежащими элементами, обнаруживаемъ то, что извѣстно подъ именемъ *асимметріи* соотношеній, т. е. если x, y и z суть три послѣдовательные элемента ряда, то, означая соотношеніе между двумя смежными черезъ R, мы увидали бы, что существуютъ формулы

$$xRy \text{ и } yRz, \text{ но не } yRx,$$

точно такъ-же, какъ существуютъ *обратныя* сотношенія

$$yR^{-1}x \text{ и } zR^{-1}y, \text{ но не } xRz.$$

Это и есть формальное опредѣленіе понятія „между“.

Изученіе такихъ соотношеній въ ряду послѣдователь-

ныхъ элементовъ играетъ большую роль вообще, и мы, сталкиваясь съ послѣдовательностью явленій различнаго характера, несомнѣнно должны были въ концѣ концовъ натолкнуться на обнаруженіе слѣдующихъ 4-хъ свойствъ рядовъ, способствующихъ развитію въ насъ идеи порядка:

1° *Симметричность* рядовъ, когда и xRy, и yRx существуютъ одновременно.

2° *Асимметричность*, когда xRy, и yRx не одно и тоже.

3° *Транзитивность*, когда изъ xRy и yRz слѣдуетъ xRz (примѣръ: прошлое и будущее относительно нѣкотораго настоящаго момента T_0).

4° *Интранзитивность*, когда изъ xRy и yRz не вытекаетъ xRz.

Очевидно, что время, напр.,—рядъ транзитивный, но асимметричный, и оно то и играло большую роль въ вопросѣ созданія идеи порядка точно такъ-же, какъ и другіе такого же типа асимметричные ряды. Далѣе рядъ точекъ на прямой a, b, c, d также рядъ асимметричный и транзитивный съ точки зрѣнія понятія „между“.... Число такихъ рядовъ понятно велико, и вотъ изученіе этихъ рядовъ и свойствъ въ нихъ фигурирующихъ и привело несомнѣнно въ дальнѣйшемъ къ созданію рядовъ безконечныхъ или незамкнутыхъ, конечныхъ и замкнутыхъ. Такъ, напр., какая разница между безконечнымъ отрѣзкомъ прямой, имѣющей начало, но не имѣющей конца, и окружностью? Въ первомъ случаѣ, нанося черезъ равные промежутки точки и означая соотношеніе между двумя смежными точками символически черезъ $x\sigma y$, мы для m-ой по счету (отъ начала) будемъ получать новыя соотношенія (между 1-ой и m-ой) вида $x\sigma^m y$ (символическое означеніе), и мы никогда не придемъ къ прежней исходной точкѣ; не то въ случаѣ круга, если дуга

соизмѣрима съ окружностью (ибо въ случаѣ несоизмѣримости мы также имѣемъ рядъ точекъ безконечнымъ): тамъ мы послѣ нѣкотораго ряда операцій увидимъ, что $x\sigma^m x$..... Изученіе же взаимоотношеній между рядами приводитъ несомнѣнно въ дальнѣйшемъ и къ понятіямъ: „функція“ (въ прогрессіяхъ, напр., $u_n = \varphi_n(n)$), „независимое“ или „зависимое“ перемѣнное, рядъ безконечный, рядъ періодическій. Это обстоятельство весьма важно, и его нужно оттѣнить, ибо всѣ важнѣйшія понятія математики до „непрерывности“ включительно базой имѣютъ идею порядка.

Къ основамъ ариѳметики впервые ясно приложилъ идею порядка *Helmholtz*. Въ своей знаменитой и блестящей работѣ „Счетъ и измѣреніе“ *) онъ вскрылъ механизмъ счета, и онъ же первый ясно обрисовалъ значеніе и роль однозначности послѣдовательности или, какъ нынче выражаются, асимметріи ряда послѣдовательныхъ явленій. Въ примѣненіи къ ариѳметикѣ она формулируется у него въ видѣ аксіомы VI:

„Если два числа различны, то одно изъ нихъ должно быть *выше* другого.“

Исходя изъ „счета“, Helmholtz беретъ затѣмъ аксіому *Grassmann*'а

$$(a+b)+1=a+(b+1),$$

которую онъ переводитъ на языкъ счета или порядка, и пользуясь ею, онъ въ дальнѣйшемъ выводитъ и обобщенные законы ассоціативности, коммутативности и дистрибутивности— словомъ строитъ всю ариѳметику съ ординальными числами. Къ кардинальному же числу Гельмгольцъ приходитъ потомъ, установивши предварительно слѣдующія важныя *положенія порядка*: „Подходящимъ повтореніемъ перемѣщенія мѣстами

*) См. Сборникъ по основаніямъ ариѳметики. Изд. Казанскаго Студенческаго Математическаго Кружка. Казань. 1905.

двухъ смежныхъ элементовъ группы можно каждый, произвольно выбранный элементъ группы, сдѣлать первымъ въ ряду, не производя ни повтореній, ни пропусковъ".

Далѣе—обобщеніе только что́ приведеннаго положенія такое:

„Повторяя перестановку сосѣднихъ членовъ группы, можно произвести всякую возможную послѣдовательность членовъ, не выпуская и не повторяя элементовъ" (обобщеніе закона коммутативности).

Ясно, что теперь мы „какъ будто" въ состояніи прійти къ понятію „численность", ибо во всѣхъ вышеприведенныхъ теоремахъ „численность" въ нашемъ смыслѣ слова остается неизмѣнной; говоримъ здѣсь „какъ будто", давая этими слова, ми понять, что *одной ординальности* для *кардинальности*, какъ это и выше мы оттѣняли, недостаточно.

Что-же касается понятія „величина", то Гельмгольцъ развилъ его очень близко къ тому, что выше было говорено о *классахъ* и соотношеніяхъ классовъ и рядовъ, и въ этомъ смыслѣ можно сказать, что идеи о „классѣ", развитыя впослѣдствіи проф. Кэмбриджа *Russel*'емъ въ его трудѣ „The principles of Mathematics", были уже у Гельмгольца. Что какъ не это, доказываютъ, напр., слѣдующія строки Гельмгольца, которыя мы приводимъ здѣсь:

„..... Великое упрощеніе и наглядность пониманія, котораго мы достигаемъ, сводя все пестрое многообразіе окружающихъ насъ вещей и измѣненій на количественныя отношенія, глубоко заложено въ самой сущности образованія нашихъ понятій. Составляя понятіе о классѣ, мы включаемъ въ него все то, что равно у объектовъ, принадлежащихъ къ этому классу. Разсматривая физическое отношеніе какъ именованное число, мы также удаляемъ изъ понятія о единицахъ все, что въ дѣйствительности въ нихъ представляется

различнымъ. Единицы суть объекты, которыя мы разсматриваемъ только какъ примѣрные представители класса, и которыхъ значеніе въ этомъ только и заключается. Въ величинахъ, составленныхъ изъ нихъ, остается тогда только самое случайное изъ различій—различіе въ численности".

Такимъ образомъ мы видимъ, что идея порядка Гельмгольцемъ использована блестяще, и мы думаемъ, что онъ правъ всюду, пока говоритъ объ ординальныхъ числахъ, но когда онъ переходитъ къ понятію о кардинальномъ числѣ, то тутъ не видно ясно, какъ все-же мы приходимъ къ понятію „численность:" мало по нашему одного свойства неизмѣнности численности, нужно еще представленіе объ „одномъ," и оно зародилось вѣроятно одновременно или даже раньше, но никакъ не послѣ ординальнаго числа. Иными словами мы хотимъ сказать, что *кардинальность должна существовать независимо отъ ординальности.* И строго логически и отвлеченно разсуждая, можно конечно строить числа, и кардинальныя независимо другъ отъ друга, но и тѣ, и другія безъ синтеза идей кардинальности и ординальности не будутъ числами въ нашемъ смыслѣ слова: въ первомъ случаѣ они будутъ хаотическими числами, а во второмъ они не будутъ кардинальными.

Столь же блестяще идея порядка была развита почти одновременно знаменитымъ *Kronecker*'омъ *).

Гораздо дальше еще въ этомъ направленіи пошли ученые *Dedekind* и *G. Cantor*. Dedekind еще глубже изслѣдовалъ идею порядка, связавши ариѳметику тѣснѣйшимъ образомъ съ логикой и ея операціями. Изучая взаимоотношенія системъ, состоящихъ изъ элементовъ, при помощи процессовъ „*Abbildung*" т. е. отображенія системы при помощи

*) См. цитированный выше «Сборникъ».

какой либо другой системы или самой себя, онъ доказываетъ знаменитый *законъ математической индукціи*. У него она является построенной на идеѣ порядка при помощи понятія „*цѣпь*“ (Kette), т. е. такой области, для которой K—сама область эквивалентна какой-либо ея части K', представляющей отображеніе K при помощи себя самой. Также чисто ординально опредѣляетъ онъ и „безконечность“, понимая подъ безконечной системой элементовъ область S такую, которая можетъ быть эквивалентна своей части S'. То обстоятельство, что математическая индукція оказывается доказанной, является удивительнымъ фактомъ. Ея роль—колоссальна въ математикѣ, какъ колоссальна роль индукціи вообще и въ другихъ наукахъ. Но особенно интересно то, что, доказавъ математическую индукцію, мы тѣмъ самымъ скрытымъ образомъ ввели идею безконечнаго и въ ариѳметику, ибо по существу она является, какъ остроумно замѣтилъ *Poincaré*, силлогизмомъ, вмѣщающимъ *безчисленное, безконечное* множество силлогизмовъ, и въ этомъ и состоитъ понятно *возможность обобщеній*, т. е. возможность самой математической науки. Пользуясь идеями „безконечность“, и „полная индукція“, Dedekind строитъ натуральный рядъ чиселъ—рядъ чисто ординальный и строитъ всю ариѳметику съ ординальными числами. Его рядъ натуральный — простѣйшій безконечный асимметричный рядъ. Отъ ординальныхъ же чиселъ Dedekind методомъ, нѣсколько напоминающимъ методъ Гельмгольца, приходитъ къ созданію кардинальнаго числа.

Идея порядка у Dedekind'а распространена также и на числа ирраціональныя, слѣд. и на идею *непрерывности*— вотъ его подлинныя слова относительно прямой:

„Если всѣ точки прямой распадаются на 2 класса такого рода, что каждая точка перваго класса лежитъ влѣво отъ каждой точки 2-го класса, то существуетъ одна и *толь-*

ко одна точка, которая производитъ это раздѣленіе прямой на два класса.“

Это и есть принципъ непрерывности прямой, который онъ затѣмъ въ нѣсколько видоизмѣненной формѣ формулируетъ какъ *принципъ непрерывности* области реальныхъ чиселъ, дающій ему возможность опредѣлить въ дальнѣйшемъ всю теорію ирраціональныхъ, предѣловъ и исчисленія безконечно малыхъ перемѣнныхъ величинъ, имѣющими предѣлами нуль).

Интересно поставить теперь вопросъ: „сама идея непрерывности можетъ-ли видоизмѣняться, не есть-ли и не обладаетъ ли она характеромъ величины?“

На этотъ вопросъ даютъ отвѣты изслѣдованія *G. Cantor*'а и его послѣдователей. Канторъ особенно рельефно оттѣнилъ идею порядка, и у него почти вездѣ въ изслѣдованіяхъ фигурируютъ ординальныя числа. Онъ предпринялъ очень интересную работу, имѣющую большое значеніе для лицъ, интересующихся теоріей познанія, работу, посвященную изученію областей, совокупностей (*Menge*) элементовъ и ихъ взаимоотношеній. Принципы, на коихъ покоится изученіе, приблизительно таковы:

1° Вещи (Ding) могутъ быть элементами совокупностей.

2°. Сами совокупности могутъ быть элементами другихъ совокупностей

3° Существуютъ совокупности 0 и I.

4° Существуютъ суммы системъ $M+N+\ldots$.

5°. Существуютъ S части у системы какъ совокупности.

6°. Существуютъ *безконечныя* системы.

7°. Принципъ отображенія Menge (*Abbildung*).

Далѣе онъ вводитъ еще понятія *Ordnungstypus* (законъ слѣдованія, порядка элементовъ системы), ординальное чис-

ло--отраженіе этого порядка и уже потомъ кардинальное число—число цѣлое въ обычномъ смыслѣ этого слова, причемъ онъ его не обосновываетъ, а *предполагаетъ*.

Увлеченіе идеей порядка у Кантора достигло настолько большихъ размѣровъ, что онъ, строя ирраціональныя числа, потомъ при помощи *Fundamentalreihe* (ординальнаго по характеру), почти лишаетъ ихъ quantitativ'наго характера. Совершенно такъ-же, какъ конечныя ординальныя числа, *C.* впослѣдствіи, какъ отраженіе понятія *Ordnungstypus*, создаетъ новыя ординальныя числа безконечныя—*трансфиниты*, и—что любопытно—у него въ одной изъ его работъ *) нѣтъ *никакой* абсолютно разницы между опредѣленіями ирраціональнаго числа и трансфинитъ, такъ что съ извѣстной точки зрѣнія трансфиниты у него—новыя ирраціональности, опредѣленныя также рядами реальныхъ чиселъ. Изучая же затѣмъ построенныя трансфиниты съ точки зрѣнія кардинальной, *C.* создаетъ настоящія реальныя безконечности $\aleph_i$, рядъ коихъ начинается $\aleph_o$— числомъ чиселъ натуральнаго или вообще *перечислимаго* ряда. Рядъ $\aleph_i$ по Кантору—безконеченъ также, ибо онъ доказалъ такую теорему:

„Если намъ данъ рядъ какой-либо опредѣленной мощности (*Mächtigkeit*, *Kardinalzahl*), то всегда можно построить систему еще бо́льшей мощности, чѣмъ данный рядъ".

Какая практическая цѣнность отъ ординальныхъ трансфинитъ Кантора? Главная—въ настоящее время: созданіе реальныхъ безконечностей, реальныхъ безконечныхъ чиселъ—$\aleph_o$ и кардинальнаго числа *линейнаго Continuum'а*.—Далѣе теоріи Кантора сильно подвинули впередъ проблему *Continuum'а*—проблему теоріи познанія. Теперь вопросъ о природѣ Continuum'а рѣшается и кардинально, и ординально, и про-

*) Zeitschrift f. Phil. und Phil. Kritik. 91.

блема эта пожалуй больше является проблемой ординальной, чѣмъ кардинальной: вѣдь Continuum, ну скажемъ, прямой изъ точекъ состоитъ *ординально* и лишь изъ отрѣзковъ кардинально*).

Далѣе вопросы безконечно-малыхъ получили иное освѣщеніе, благодаря другой постановкѣ вопроса *объ аксіомѣ непрерывности Архимеда.* Въ этой области интересны работы *O. Stolz*'а, который замѣняетъ аксіому Архимеда другой: „Если въ системѣ *II* находятся пустоты (P_1, P_2), то всегда можно найти такую величину D, что $P_2 - P_1 < D$."

Отбрасывая или принимая ее, мы самую простую операцію „вычитаніе" уже выдѣляемъ какъ *особенную.* Канторовскія трансфиниты даютъ логическій матеріалъ для подобныхъ допущеній. Также наглядно они интерпретируются изслѣдованіями *Du-Rois-Reymond'a* въ области потенціальныхъ безконечностей и *Borel*'я въ области теоріи роста функцій.

Но особенно рельефный образчикъ областей, не подчиняющихся аксіомѣ Архимеда, представляютъ область реальныхъ безконечно малыхъ, безконечностей Du-Bois-Reymond'a и роста функцій или возрастаній функціи. Они же приводятъ къ положенію:

Непрерывность — величина и можетъ быть разныхъ порядковъ.

Вспомнимъ, напр., ирраціональныя безконечности Du-Bois Reymond'a или возрастаній функцій и сравнимъ ихъ съ обыкновенными ирраціональными конечными числами: въ то время какъ послѣднія могутъ быть опредѣляемы *перечислимыми* рядами, какая-либо функція понимаемая какъ величина особаго рода „возрастаніе" (croissançe) функціи, такимъ

---

* Третій извѣстный парадоксъ Зенона о летящей стрѣлѣ объясняется именно какъ разъ смѣшеніемъ ординальности съ кардинальностью траэкторіи стрѣлы.

рядомъ опредѣлена быть не можетъ *). Несомнѣнно, что это обстоятельство съ ясностью говорить намъ, что Continuum конечный между O и 1, положимъ, и Continuum хотя бы *потенціальныхъ безконечностей* совершенно различны—послѣдній неизмѣримо *плотный*, *гуще* по сравненію съ первымъ. Задача математика теперь—задать математически и ясно эту разницу, задать специфическіе признаки того и другого. Наше положеніе, только что приведенное здѣсь, можетъ казаться нѣсколько парадоксальнымъ, но нужно только усвоить себѣ, что такое непрерывность. Когда математикъ, оперирующій съ конечными числами, скажетъ, что онъ имѣетъ въ своемъ распоряженіи непрерывную область чиселъ? Тогда, когда онъ къ раціональнымъ числамъ присоединитъ ирраціональныя, т. е. когда онъ возьметъ всю область реальныхъ чиселъ. Представьте теперь себѣ, что Вы взяли Continuum безконечностей и вообразите себѣ, что каждая изъ нихъ отображается точкой прямой. Ясно вѣдь въ силу теоремъ Du-Bois-Reymond'a **), что послѣдній Continuum гуще перваго, а слѣдовательно и его непрерывность понимаемая въ смыслѣ полноты, какъ хорошо говорятъ нѣмцы, *Dichtigkeit* системы, порядка болѣе высокаго, чѣмъ первая. Мы не можемъ пока останавливаться на этомъ болѣе подробно..

Самые вопросы о непрерывности пространства приняли другую форму: съ точки зрѣнія Кантора измѣреній не существуетъ, ибо квадратъ или кубъ можно отобразить на ребрѣ (квадратъ и кубъ какъ совокупности точекъ).

Современная теорія функцій кладетъ въ основаніе *Cantor*'овскія теоріи: теперь понятія чисто ординальныя *abzählbare Menge*, *ueberalldichte*, *perfecte*, *geschlossene* и др. пріобрѣли полныя права гражданства и особенно тамъ, гдѣ „*порядокъ*“

*) *E. Borel.* Lécons sur la théorie des fanctions. pag. 112.
**) *Du-Bois-Reymond.* Math.-Ann. Bd. 8 ünd. 11.

играетъ особенную роль въ родѣ, напр., *Analysis situs*. Въ этомъ направленіи интересны работы *Schönflies*'а „*Beiträge zur Theorie der Punctmengen*“ — тамъ авторъ изслѣдуетъ важнѣйшія проблемы о природѣ кривыхъ, ихъ контуръ, изучаетъ понятія „замкнутость“, „спрямляемость“, „квадрируемость“ и т. п., причемъ общій характеръ изслѣдованія— чисто ординальный. Эти же соображенія создали теперь въ математикѣ цѣлые классы *не-геометрическихъ* кривыхъ съ странными причудливыми свойствами—въ родѣ, напр., кривой *Peano*, заполняющей всю площадь квадрата и др....

Далѣе распредѣленіе нулей и полюсовъ, и ихъ частота или густота у аналитической функціи играетъ громаднѣйшую роль, и въ зависимости отъ этого функція будетъ обладать тѣми или другими свойствами. Можно сказать даже больше, что этимъ факторомъ обусловлены *чисто ариѳметическія* свойства функціи, напр., рядъ значеній функціи (алгебрическія, трансцендентныя или раціональныя) для опредѣленнаго ряда значеній перемѣннаго.

Такимъ образомъ мы видимъ, что теоріи Кантора и его послѣдователей и предшественниковъ, основанныя на идеѣ порядка играютъ замѣтную роль въ матетатикѣ, но идея порядка не только замѣтна въ области логики, аксіоматической части ариѳметики, анализа безконечно-малыхъ—она грандіозную роль сыграла и въ анализѣ конечныхъ. Въ теоріи чиселъ, напр., она съ успѣхомъ была примѣнена *Poinsot* въ его мемуарѣ „Размышленія объ основныхъ положеніяхъ теоріи чиселъ“ *). Алгебрическая теорія *Abel*'я и *Galois* развѣ не построена вся на изученіи группъ субституцій корней ур-нія? Вся теорія группъ безконечно малыхъ преобразованій, инваріантовъ, теоріи опредѣлителей развѣ не суть теоріи, построенныя на идеѣ порядка?

*) См. Сборникъ по Осн. Ариѳ., цитированный выше.

А о геометріи и говорить нечего: выбросивши метрику изъ всѣхъ Геометрій, мы получаемъ Геометріи положенія и порядка. Существованіе геометріи проэктивной, построенной на ангармоническомъ и гармоническомъ соотношеніяхъ точекъ, прямыхъ, плоскостей является, какъ нельзя лучше, иллюстраціей геометріи, построенной на идеѣ порядка („между“). Тотъ-же фактъ, что теорія коническихъ сѣченій можетъ быть развита съ одной стороны чисто аналитически, а съ другой стороны чисто проэктивно, еще лишній разъ говоритъ намъ, что идеи порядка или ординальная, и кардинальная суть идеи независимыя другъ отъ друга, а то обстоятельство, что проэктивныя свойства записываются и аналитически, еще разъ говорятъ намъ то, что говорятъ всѣ области математики, именно: соотношенія порядка могутъ быть измѣряемы. Успѣхъ математическихъ наукъ въ значительной степени обусловленъ тѣмъ, что идеи порядка могутъ быть записываемы аналитически.

Приватъ-доцентъ *Н. Парфентьевъ.*

Казань. 1906. XI. 1.